Hommage à Thomas

par Guillaume Carlier[1], Myriam Comte[2], Ion Ionescu[3], Bernd Kawohl[4] et Edouard Oudet[5]

Notre collègue et ami Thomas Lachand-Robert nous a quittés le 23 février dernier. Il était âgé de 39 ans seulement. Sa disparition brutale a profondément choqué notre communauté. Nous adressons à sa veuve, Martine, toute notre amitié.

Thomas était Professeur à Chambéry depuis 2001, il dirigeait le Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie (LAMA) depuis septembre 2005. Ancien élève de l'École Polytechnique (promotion 1986), il avait débuté sa carrière au Laboratoire d'Analyse Numérique de Paris 6 (devenu depuis Laboratoire Jacques-Louis Lions) comme Maître de Conférences à partir de 1993, après avoir effectué une thèse portant sur les propriétés qualitatives des solutions d'EDP elliptiques, sous la direction d'Henri Berestycki. Thomas s'est toujours investi sans compter dans la vie des laboratoires auxquels il a appartenu. L'énergie et l'esprit fédérateur avec lesquels il dirigeait le LAMA étaient appréciés de tous ses collègues et avaient été récemment remarqués par le comité d'évaluation du CNRS. Ses collègues se souviendront de sa disponibilité et des précieux conseils qu'il dispensait avec énergie et passion. Enseignant enthousiaste et sans complaisance, il avait activement participé à la création de MATEXO, projet de mise en ligne d'exercices et problèmes à destination des enseignants. Il est l'auteur de plusieurs ouvrages de programmation et de LateX, dont il était un utilisateur méticuleux ; dans ce domaine comme dans tant d'autres, nous avons tous beaucoup appris à son contact.

Thomas était un chercheur passionné qui a profondément marqué tous ses collaborateurs. Nous allons essayer ici de retracer une partie de ses aventures scientifiques.

[1]carlier@ceremade.dauphine.fr
[2]comte@ann.jussieu.fr
[3]ionescu@univ-savoie.fr
[4]kawohl@mi.uni-koeln.de
[5]Edouard.Oudet@univ-savoie.fr

Calcul des variations sous contraintes

Soit Ω un ouvert convexe borné de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions convexes sur Ω et considérons :

$$\inf_{u \in X \cap \mathcal{C}} J(u) \text{ avec } J(u) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x)) dx \tag{1}$$

où X est un certain convexe fermé d'un espace de Sobolev adapté au problème. En termes d'applications, les problèmes variationnels soumis à une contrainte de convexité interviennent naturellement dans deux domaines bien distincts : le problème de la résistance minimale de Newton d'une part, l'économie mathématique d'autre part avec le modèle de tarification non-linéaire de Rochet et Choné [5]. Le problème de Newton consiste à trouver la forme d'un solide offrant une résistance minimale au déplacement dans un milieu raréfié ; ce qui correspond au cas $L(x,u,v) = 1/(1+|v|^2)$ et $X := \{u \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}} \;:\; 0 \le u \le M\}$ dans (1). La contrainte de convexité traduit ici une condition d'impact unique des particules incidentes sur le corps et la contrainte $0 \le u \le M$ donne une borne sur la hauteur du corps.

Notons que l'existence de minimiseurs est généralement facile à obtenir même sans convexité de la fonctionnelle et repose uniquement sur la compacité locale de $\mathcal{C}$ dans les espaces de Sobolev (voir [1]). En revanche, la contrainte de convexité, de nature globale, rend difficile l'obtention de conditions d'optimalité maniables et de propriétés qualitatives des solutions, leur régularité par exemple. Pour contourner cette difficulté, Thomas savait déployer des trésors d'inventivité et tout son art dans les constructions géométriques fines.

Thomas a en effet fait connaître des progrès remarquables à la compréhension de ces problèmes mais aussi à leur analyse numérique. En quelques années, il était devenu l'expert sur ces questions. Thomas a d'abord collaboré sur ce thème avec Mark Peletier. Ensemble, ils ont obtenu des résultats de portée générale sur les problèmes de type (1) dans le cas d'une fonctionnelle non convexe du gradient (voir [16], [17], [18]). Dans [17], Thomas et Mark ont montré que pour le problème de Newton (et ce résultat s'étend à une classe plus générale) la contrainte de convexité est saturée au sens où les solutions ne sont strictement convexes sur aucun ouvert. Mentionnons aussi un résultat, a priori étonnant, de [18] :
étant donnée une matrice symétrique A, si Ω est de classe C^1 alors l'infimum de $\displaystyle\int_\Omega A\,\nabla u \cdot \nabla u$ parmi toutes les fonctions convexes de la boule unité de $H^1_0(\Omega)$ est égal à la plus petite valeur propre de A. Dans le cas d'un lagrangien fortement convexe « en ∇u », Thomas et Guillaume Carlier ont établi dans [3] des résultats de régularité C^1 des minimiseurs, résultats qui s'appliquent notamment aux problème de Rochet et Choné [5].

Thomas avait compris très vite l'importance de développer des méthodes numériques pour les problèmes de type (1) mais aussi que l'on se heurtait là encore à de sérieuses obstructions notamment dûes au fait que les éléments finis $P1$ et convexes sur un maillage structuré ne forment pas un ensemble dense (loin s'en faut et même au sens des distributions !) dans l'ensemble des fonctions convexes. Dans [3], Thomas, Guillaume Carlier et Bertrand Maury ont proposé une approximation externe de la contrainte de convexité, prouvé la convergence de la méthode et l'ont implémentée sur des cas 2D. Récemment avec Édouard Oudet [19], Thomas avait développé une nouvelle méthode numérique pour certains problèmes d'optimisation de formes posés dans une classe de corps convexes. La méthode développée dans [19] permet de traiter une grande variété de problèmes de nature géométrique dont le problème d'Alexandrov et celui de Cheeger. Cette approche permit aux auteurs d'obtenir numériquement le corps convexe de moindre résistance connue à ce jour pour le problème de Newton. Ce résultat présente aussi un intérêt théorique en réfutant la conjecture selon laquelle les solutions du problème de Newton seraient développables.

Une variante du problème de Newton est de ne plus imposer au solide d'être convexe, mais de supposer que les particules qui le heurtent en un choc élastique parfait, ne le touchent qu'une seule fois. Cette modélisation, encore simple, est plus proche du problème physique initial qui consiste à rechercher les objets ayant une résistance minimale au flot d'un gaz dilué. La première question qu'il fallait résoudre est celle de l'existence même d'un minimiseur. Thomas et Myriam Comte ont démontré dans [7] et dans [8] que le minimum ne peut être atteint dans une classe « raisonnable » de fonctions, ensemble qui contient notamment les fonctions convexes. En se limitant aux fonctions radiales, Thomas et Myriam ont en revanche démontré que le minimum est atteint, mais, que si pour certaines valeurs de M, le minimum est unique, pour d'autres il existe une infinité de minimiseurs et que l'ensemble de ceux-ci n'est même pas compact ! Dans les cas où le minimiseur est unique, on peut donner sa forme. Il a fallu toute la persévérance de Thomas pour obtenir ce résultat. En effet pendant des mois, Thomas a essayé de démontrer que le minimiseur était concave alors, qu'en fait, il n'est ni concave, ni convexe. C'était une des qualité de Thomas de ne pas lâcher un problème tant qu'il n'était pas convaincu que les difficultés rencontrées étaient pratiquement insurmontables. Il aimait les problèmes difficiles, hors des sentiers battus, dont l'énoncé est simple mais la résolution très complexe. Il n'hésitait pas à utiliser tous les outils dont il disposait et notamment à faire appel à l'analyse numérique afin de les résoudre. Très souvent, il avait une bonne intuition de la solution et arrivait, après plusieurs essais infructueux, à trouver la démonstration. Thomas était rarement à court d'idées pour aborder un problème et il n'hésitait pas à travailler dans des domaines variés.

Ensembles de Cheeger

En mai 2001, Thomas a commencé à travailler avec Ioan sur la modélisation des glissements de terrain, basée sur un modèle de fluide de Bingham non homogène [11]. En raison de leur propre poids, les géo-matériaux sont rendus compacts (la densité augmente avec la profondeur), donc les propriétés mécaniques (seuil de plasticité g et forces volumiques f) changent également avec la profondeur. À partir de cette formulation, ils ont défini dans un cas très simplifié (écoulement anti-plan) un coefficient de sécurité s ($s \leq 1$ si et seulement si le terrain est bloqué) par

$$B(v) := \frac{\displaystyle\int_\Omega g(x)|\nabla v(x)|\, dx}{\left|\displaystyle\int_\Omega f(x)v(x)\, dx\right|}, \qquad s := \inf_{v\in V} B(v), \tag{2}$$

où $V = \{v \in H^1(\Omega);\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine occupé par le terrain de frontière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Dans les années 70, R. Glowinski s'est beaucoup intéressé à ce problème dans le cas homogène ($g \equiv$ cste > 0) pour modéliser le blocage du pétrole dans les pipelines mais les choses sont un peu plus compliquées dans le cas non-homogène.
L'idée surprenante de Thomas a été de considérer les champs de vitesse v comme les fonctions indicatrices 1_ω de domaine $\omega \subset \Omega$ et ramener (2) à un problème d'optimisation de formes en démontrant que

$$s = \inf_{\omega\subset\Omega} J(\omega) \qquad \text{avec } J(w) := B(1_\omega) = \frac{\int_{\partial\omega\setminus\Gamma_1} g}{\int_\omega f}, \tag{3}$$

Il a réussi aussi à montrer [12] qu'il existe au moins un ensemble X optimal, qui modélise ici la partie du terrain qui sera en mouvement [10], et que celui-ci a de bonnes propriétés de régularité.
Cette nouvelle formulation de Thomas a fourni l'occasion de faire trois « rencontres », complètement inattendues au départ, dans trois domaines pas toujours voisins : analyse non linéaire, géométrie et mécanique du solide. En effet, dans le cas homogène $f \equiv 1 \equiv g$ et $\Gamma_1 = \emptyset$ le minimum s dans (2) est $\lambda_1(\Omega)$, la valeur propre d'un opérateur très dégénéré appelé le 1-laplacian [9, 13]. Cette valeur propre est la limite pour $p \to 1$, de $\lambda_p(\Omega)$, le coefficient de Rayleigh (ou première valeur propre) d'une famille d'opérateurs non linéaires, le p-laplacian. L'intérêt des géomètres pour ces valeurs propres $\lambda_p(\Omega)$ est lié à l'estimation $\lambda_p(\Omega) \geq (h(\Omega)/p)^p$ (voir [21]), où $h(\Omega)$ est la constante de Cheeger

$$h(\Omega) = \inf_{\omega\subset\Omega} |\partial\omega|/|\omega|.$$

Pour $p = 2$ il s'agit d'un ancien et célèbre résultat de Cheeger [4] qui donne une estimation de la valeur propre du laplacien $\lambda_2(\Omega)$ par rapport à des propriétés géométriques du domaine Ω. Il a été assez surprenant de comprendre que le facteur de sécurité n'était pas autre chose que la constante de Cheeger, i.e. $s = h(\Omega)$. Soulignons que la formulation de Thomas en termes d'optimisation de formes (3) donne une méthode originale et puissante pour aborder un vieux et difficile problème en mécaniques des solides : l'analyse de la charge limite (voir [6] pour une description détaillée). Thomas (avec Ioan, Édouard et Riad Hassani) était en train de travailler à l'extension au cas vectoriel (bien plus intéressant pour les mécaniciens) des méthodes développées pour le cas scalaire, quand il nous a quittés, si brusquement en février 2006.

Ensembles de largeur constante

Un ensemble convexe compact d'un espace euclidien, est dit de *largeur constante* si sa projection sur toute droite affine est de longueur constante. Les boules sont des exemples simples de tels ensembles mais il en existe beaucoup d'autres. Les objets de largeur constante du plan, appelés *orbiformes*, ont donné lieu à de très nombreux travaux depuis le XIX^{e}siècle, parmi lesquels ceux de l'ingénieur Frank Reuleaux dont le nom est resté attaché à l'orbiforme obtenu comme intersection de trois disques de même rayon centrés en les sommets d'un triangle équilatéral. Contrairement aux orbiformes, très peu d'objets de largeur constante de dimension trois (appelés *sphèroformes*) ont été décrits dans la littérature. Cette absence s'explique en grande partie par l'impossibilité d'obtenir un sphèroforme par une intersection finie de boules.
Ces deux dernières années, Thomas s'était intéressé à l'étude des objets de largeur constante de dimension plus grande que deux. Ses différents travaux étaient motivés par un très ancien problème d'optimisation de forme : minimiser la mesure (c'est à dire l'aire ou le volume en dimension deux ou trois) parmi les ensembles de largeur constante fixée. Le problème dans le plan fut résolu il y a maintenant un siècle par W. Blaschke et H. Lebesgue qui établirent que les triangles de Reuleaux sont les seuls ensembles optimaux. En dimension trois, ce problème est encore ouvert !
Dans les années 20, le mathématicien F. Meissner donna une description géométrique d'un sphèroforme basé sur une construction analogue à celle de Reuleaux. Comme nous l'avons évoqué, l'intersection de quatre boules de même rayon, centrées en les sommets d'un tétraèdre régulier, n'est pas de largeur constante. Le tétraèdre de Meissner est obtenu par le lissage de trois des arrêtes singulières d'une telle intersection. Ce corps est encore à ce jour le sphèroforme de largeur fixée de plus petit volume connu.
Les avancées majeures de Thomas sur cette question portent aussi bien sur les aspects purement géométriques qu'analytiques du problème. Après avoir décrit de nouvelles caractérisations géométriques des objets de largeur constante, il proposa dans [20] un procédé permettant à partir d'un objet de largeur constante de dimension $n-1$ de construire un objet de largeur constante de dimension

n. Par ce procédé, partant d'un segment, on génère un triangle de Reuleaux. À partir d'un triangle de Reuleaux, on construit ... le tétraèdre de Meissner ! Cette construction permet ainsi de générer de manière canonique des ensembles qui jusqu'à la dimension deux sont optimaux...
Suite à l'obtention de ces caractérisations géométriques, Thomas s'intéressa plus particulièrement à la paramétrisation des sphèroformes : il proposa notamment une description complètement analytique du problème de Blaschke-Lebesgue. S'appuyant sur une nouvelle notion de *surface médiane*, il établit la correspondance entre les sphéroformes et un certain espace fonctionnel. Ces travaux qu'il ne put achever lui avaient permis d'obtenir des conditions d'optimalité pour le problème de Blaschke-Lebesgue et de redémontrer de manière purement algébrique une célèbre formule de Blaschke reliant le volume et la surface des sphéroformes.

Un témoignage de Bernd Kawohl

Thomas Lachand-Robert had a deep and genuine interest in hard and beautiful problems.
a) He wrote series of papers on questions related to Newton's problem of minimal resistance. This nonconvex variational problem is one of the oldest in the calculus of variations. A clean existence proof was given only about 10 years ago, 300 years after Newton provided an explicit solution for this nonconvex and noncoercive problem in a class of radially decreasing functions.
Thomas (and M. Peletier) looked for nonradial solutions and found convex bodies whose front end consisted of flat regular polygons – a truly stunning result.
b) In 2003, I presented results on the following restricted isoperimetric problem at a conference on shape optimization in Luminy. Given a domain Ω find a subdomain C that minimizes the ratio of perimeter over volume. Such a set is the called the Cheeger set of Ω. Cheeger had given a lower bound for the first Dirichlet-Laplace eigenvalue in terms of the minimizing ratio $h(\Omega)$, the Cheeger constant. Thomas had encountered such sets in the modelling of landslides, and Kutev and I had used them to describe singular solutions of the equation

$$u_t - \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 1$$

in [14], and we were both interested in their shape and geometry. So we wrote a joint paper on Cheeger sets [15]. Most of its results are on convex plane domains. For those the Cheeger set is generated by sweeping Ω from the inside with a disc of appropriate radius. The radius ρ of this disc is chosen in such a way that the set $\{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \rho\}$ has area equal to the area $\pi\rho^2$ of the disc.
c) Another hard optimization problem that Thomas studied (with É. Oudet) was the problem of finding convex bodies of constant given width, but with minimal

volume. In two dimensions this problem has long been solved, its solution is the Reuleaux triangle. In three dimensions, there are geometric objects, the Meissner bodies, which are suspected to have minimal volume. Thomas (and É. Oudet) found a very elegant and beautiful way to construct (nontrivial) bodies of constant width in any dimension. In fact, their inductive algorithm starts with an interval in one dimension and recovers the Releaux-triangle in two and the Meissner bodies in three dimensions. This construction provides deep insight in a very hard and beautiful geometric problem.
It is a great pity that somebody with such talents and gifts has left us so early.

Références

[1] G. Buttazzo, V. Ferone, B. Kawohl, *Minimum Problems over sets of concave functions and related questions*, Math. Nachrichten, **173**, pp. 71–89 (1993).

[2] G. Carlier, T. Lachand-Robert, *Regularity of solutions for some variational problems subject to a convexity constraint*, Comm. Pure Appl. Math., **54**, pp. 583–594 (2001).

[3] G. Carlier, T. Lachand-Robert, B. Maury, *A numerical approach to variational problems subject to a convexity constraint*, Numerische Math., **88**, pp. 299-318 (2001).

[4] J. Cheeger, *A lower Bound for the Smallest Eigenvalue of the Laplacian, Problems in Analysis*, A Symposium in Honor of Salomon Bochner, Ed. R.C. Gunning, Princeton Univ. Press, pp. 195–199 (1970).

[5] P. Choné, J.-C. Rochet, *Ironing, Sweeping and Multidimensional screening*, Econometrica, **66**, pp. 783–826 (1998).

[6] E. Christiansen, *Limit analyis of collapse states*, Handbook of Numerical Analysis, vol. 4, P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds., Noth Holland, Amsterdam, pp. 193–312 (1996).

[7] M. Comte, T. Lachand-Robert, *Newton's problem of the body of minimal resistance under a single-impact assumption*, Calc. Var. P.D.E., **12**, pp. 173-211 (2001).

[8] M. Comte, T. Lachand-Robert, *Existence of minimizers for the Newton's problem of the body of minimal resistance under a single-impact assumption*, J. Anal. Math., **83**, pp. 313-335 (2001).

[9] F. Demengel, *On some nonlinear equation involving the 1-Laplacian and trace map inequalities*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 48A, **8**, pp. 1151-1163 (2002).

[10] R. Hassani, I. R. Ionescu, T. Lachand-Robert, *Shape optimization and supremal functionals in landslides modeling*, Applied Mathematics and Optimization, **52**, pp. 349–364 (2005).

[11] P. Hild, I. Ionescu, T. Lachand-Robert, I. Rosca, *The blocking property of an inhomogeneous Bingham fluid. Applications to landslides*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, **36**, No. 6, pp. 1013–1026 (2002).

[12] I. R. Ionescu, T. Lachand-Robert, *Generalized Cheeger's sets related to landslides*, Calculus of Variations and PDE, **23**, pp. 227–249 (2005).

[13] B. Kawohl, V. Fridman, *Isoperimetric estimates for the first eigenvalue of the p-Laplace operator and the Cheeger constant*, Comm. Mat. Univ. Carolinae, **44**, pp. 659-667 (2003).

[14] B.Kawohl, N.Kutev, *Global behaviour of solutions to a parabolic mean curvature equation*, Differential and Integral Equations, **8**, pp. 1923–1946 (1995).

[15] B.Kawohl, T. Lachand-Robert, *Characterization of Cheeger sets for convex subsets of the plane*, Pacific J. Math., to appear.

[16] T. Lachand-Robert, M. Peletier, *Extremal Points of a Functional on the Set of Convex Functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **127**, pp. 1723–1727 (1999).

[17] T. Lachand-Robert, M. Peletier, *An Example of Non-convex Minimization and an Application to Newton's Problem of the Body of Least Resistance*, Ann. Inst. H. Poincaré **18**, pp. 179–198 (2001).

[18] T. Lachand-Robert, M. Peletier, *The Minimum of Quadratic Functionals of the Gradient on the Set of Convex Functions*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **15**, pp. 289-297 (2002).

[19] T. Lachand-Robert, É. Oudet, *Minimizing within convex bodies using a convex hull method*, SIAM Journal on Optimization, **16**, pp. 368-379 (2005).

[20] T. Lachand-Robert, É. Oudet, *Bodies of constant width in arbitrary dimension*, accepté pour publication dans Math. Nachrichten.

[21] A.-M. Matei, *First eigenvalue for the p-Laplace operator*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., **39A**, No.8, pp. 1051–1068 (2000).

Martine Barbelenet tient à remercier les nombreux collègues qui lui ont témoigné leur soutien et leur amitié, en particulier les membres de l'Institut Fourier, du Laboratoire Jacques-Louis Lions et du Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Savoie (LAMA).